SESSION 1996

T P E

FILIERE M

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES OPTION

PREMIERE PARTIE : matrice compagne d'un endomorphisme cyclique

I 1) • Si f est cyclique, il existe un vecteur x_0 tel que la famille $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. Notons $(-a_0, \dots, -a_{n-1})$ les coordonnées du vecteur $f^n(x_0) = f(f^{n-1}(x_0))$ dans la base $\mathscr{B}$. Dans cette base, la matrice de f est la matrice C.

• Réciproquement, si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de f est C, posons $x_0 = e_1$.
Pour $i \in [\![2, n]\!]$, on a $e_i = f(e_{i-1})$ et donc, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, $e_i = f^{i-1}(e_1) = f^{i-1}(x_0)$. La famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est donc une base de E et f est cyclique.

$$\boxed{f \text{ est cyclique si et seulement si il } \mathscr{B} \text{ base de } E \text{ telle que } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = C.}$$

I 2) En développant $\det(C - XI_n)$ suivant sa dernière colonne, on obtient

$$P_C = (-a_{n-1} - X)(-X)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1}(-a_k)\Delta_k,$$

où Δ_k est le déterminant $\begin{vmatrix} -X & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & -X & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \times & \dots & \times & -X & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & \dots & \dots & \times & 1 & \times & \dots & \times \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ \times & \dots & \dots & \times & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $(-X)$ étant écrit k fois. Un calcul par blocs fournit $\Delta_k = (-X)^k$ et donc,

$$P_C = (-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k a_k(-1)^k X^k) = (-1)^n(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k) = (-1)^n Q.$$

$$\boxed{P_C = (-1)^n Q.}$$

Si f est cyclique, on peut lui associer comme en 1) une matrice compagne. D'après le calcul précédent, les coefficients de la dernière colonne de cette matrice sont uniquement déterminés à partir des coefficients du polynôme caractéristique de f. La matrice compagne associée à un endomorphisme cyclique est uniquement définie.

I 3) Soit λ une valeur propre complexe de la matrice C. La matrice constituée par les $n-1$ premières colonnes et $n-1$ dernières lignes de la matrice $C - \lambda I_n$ est inversible car de déterminant 1. La matrice $C - \lambda I_n$ est donc de rang $n-1$ au moins ou encore $\dim(\mathrm{Ker}(C - \lambda I_n)) \leq 1$. Puisque λ est valeur propre, on a plus précisément $\dim(\mathrm{Ker}(C - \lambda I_n)) = 1$ et donc

$$\boxed{\text{les sous-espaces propres de la matrice } C \text{ sont donc des droites vectorielles.}}$$

Déterminons alors les sous-espaces propres de C.

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

Soient λ une valeur propre complexe de la matrice C et $X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -a_0x_n = \lambda x_1 \\ \forall i \in [\![2, n]\!],\ x_{i-1} - a_{i-1}x_n = \lambda x_i \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_{n-1} = (a_{n-1} + \lambda)x_n \\ x_{n-2} = a_{n-2}x_n + \lambda x_{n-1} = (a_{n-2} + a_{n-1}\lambda + \lambda^2)x_n \\ x_{n-3} = a_{n-3}x_n + \lambda(a_{n-2} + a_{n-1}\lambda + \lambda^2)x_n = (a_{n-3} + a_{n-2}\lambda + a_{n-1}\lambda^2 + \lambda^3)x_n \\ \vdots \\ x_1 = (a_1 + a_2\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \lambda^{n-1})x_n \end{array}\right.$$

ce qui montre que $\mathrm{Ker}(C - \lambda I_n)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur

$$(a_1 + a_2\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \lambda^{n-1}, \ldots, a_{n-2} + a_{n-1}\lambda + \lambda^2, a_{n-1} + \lambda, 1).$$

DEUXIEME PARTIE : endomorphismes nilpotents

II 4) Soit x_0 un vecteur tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$. Vérifions que la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Puisque $\mathrm{card}(f^i(x_0))_{0\leq i\leq n-1} = n = \dim(E) < +\infty$, il suffit de vérifier que la famille $(f^i(x_0))_{0\leq i\leq n-1}$ est libre.

Supposons par l'absurde qu'il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq (0, 0, ..., 0)$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) = 0$.

Soit $k = \mathrm{Min}\{i \in [\![0, n-1]\!]/\ \alpha_i \neq 0\}$. On a alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) = 0 \Rightarrow \sum_{i=k}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) = 0 \Rightarrow f^{n-1-k}\left(\sum_{i=k}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0)\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=k}^{n-1} \alpha_i f^{n+i-k-1}(x_0) = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_k f^{n-1}(x_0) = 0 \text{ (car pour } i \geq k+1,\ n+i-k-1 \geq n \text{ et donc } f^{n+i-k-1}(x_0) = 0)$$
$$\Rightarrow \alpha_k = 0 \text{ (car } f^{n-1}(x_0) \neq 0).$$

Ceci contredit la définition de k. La famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est donc une base de E et f est cyclique.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est nilpotent d'indice } n, \text{ alors } f \text{ est cyclique.}}$$

Puisque $f(f^{n-1}(x_0)) = 0$, la matrice de f dans la base $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est une matrice compagne et donc la matrice compagne de f.

D'après la question 3), Kerf est de dimension au plus 1. Mais f étant nilpotent, f n ?est pas inversible et donc

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker} f) = 1.}$$

II 5) a) Soient $x \in E$ et $k \in [\![0, p-1]\!]$.

$$x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^k(x)) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}.$$

Donc,

$$\boxed{\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ N_k \subset N_{k+1}.}$$

Soient $k \in [\![0, p-1]\!]$ et $y \in f(N_{k+1})$. Il existe $x \in N_{k+1}$ tel que $y = f(x)$. Mais alors $f^k(y) = f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = 0$ et donc $y \in N_k$. Ainsi

$$\boxed{\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ f(N_{k+1}) \subset N_k.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

b) D'après la question a), φ est bien une application de N_{k+1} dans N_k, linéaire car f l'est. Le théorème du rang permet alors d'écrire

$$\begin{aligned}
n_{k+1} &= \dim(N_{k+1}) = \dim(\mathrm{Ker}\varphi) + \dim(\mathrm{Im}\varphi) \\
&= \dim(\mathrm{Ker}f \cap N_{k+1}) + \dim(f(N_{k+1})) = \dim(\mathrm{Ker}f) + \dim(f(N_{k+1})) \text{ (car Ker}f = N_1 \subset N_{k+1}) \\
&\leq \dim(\mathrm{Ker}f) + \dim(N_k) \\
&= 1 + n_k \text{ (d'après 4)).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ n_{k+1} \leq n_k + 1.}$$

c) • Si $n_k = n_{k+1} (< +\infty)$ alors, puisque $N_k \subset N_{k+1}$ (d'après 5)a)), on a $N_k = N_{k+1}$.
• Soit $j \geq k+1$. Supposons que $N_j = N_k$ et montrons que $N_{j+1} = N_k$. On a déjà $N_k = N_j \subset N_{j+1}$. Mais pour $x \in E$,

$$x \in N_{j+1} \Rightarrow f^{j+1}(x) = 0 \Rightarrow f^j(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in N_j = N_k \Rightarrow f^k(f(x)) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1} = N_k.$$

et donc, $N_{j+1} = N_k$.

On a montré par récurrence que $\forall j \geq k+1,\ N_j = N_k$.

$$\boxed{\text{Si } n_k = n_{k+1} \text{ alors } \forall j \geq k+1,\ N_j = N_k.}$$

On a $n_p = \dim(\mathrm{Ker}f^p) = n$ et $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $n_k \leq n_{k+1} \leq 1 + n_k$. Par suite, $n_{k+1} = n_k$ ou $n_{k+1} = n_k + 1$. Maintenant, puisque $f^{p-1} \neq 0 = f^p$, $N^{p-1} \neq N_p$ et le début de la question montre que $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $n_{k+1} = n_k + 1$.
Par suite, $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $n_k = n_1 + (k-1) = k$ ce qui reste vrai pour $k = 0$. En particulier, $p = n_p = n$. On a montré que

$$\boxed{p = n \text{ et } \forall k \in [\![0, n]\!],\ n_k = k.}$$

TROISIEME PARTIE : une caractérisation des endomorphismes cycliques

III 6) f est cyclique donc il existe un vecteur x_0 tel que la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

Soit $(\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

$$\begin{aligned}
\alpha_0 \mathrm{Id} + \alpha_1 f + ... + \alpha_{n-1} f^{n-1} = 0 &\Rightarrow \forall x \in E,\ \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + ... + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x) = 0 \\
&\Rightarrow \alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + ... + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0 \\
&\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = 0 \text{ (car la famille } (x_0, f(x_0), ..., f_{n-1}(x_0)) \text{ est libre).}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\text{si } f \text{ est un endomorphisme cyclique, la famille } (\mathrm{Id}, f, ..., f^{n-1}) \text{ est libre.}}$$

III 7) a) $(f - \lambda_k I)^{m_k}$ est un polynôme en f et donc commute avec f. On sait alors que $E_k = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k I)^{m_k}$ est stable par f.

Les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux (les λ_k étant deux à deux distincts, ces polynômes pris deux à deux n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$). D'après le théorème de décomposition des noyaux, $\mathrm{Ker}(P_f(f)) = E_1 \oplus ... \oplus E_p$. Mais d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_f(f) = 0$ et donc $\mathrm{Ker}(P_f(f)) = E$. Finalement,

$$\boxed{\forall k \in [\![1, p]\!],\ f(E_k) \subset E_k \text{ et } E = E_1 \oplus ... \oplus E_p.}$$

b) Puisque f laisse stable E_k, φ_k est bien un endomorphisme de E_k. Par définition de E_k, on a pour tout vecteur x élément de E_k, $(f - \lambda_k I)^{m_k}(x) = 0$ ou encore $\varphi_k^{m_k}(x) = 0$.

$$\boxed{\varphi_k^{m_k} = 0.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

Notons f_k la restriction de f à E_k (on a donc $f_k = \lambda_k \mathrm{Id}_{E_k} + \varphi_k$). Puisque le polynôme $(X-\lambda_k)^{m_k}$ est annulateur de f_k, λ_k est l'unique valeur propre de f_k (f_k admettant au moins une valeur propre puisque $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et que $E_k \neq \{0\}$). Par suite, le polynôme caractéristique de f_k est $(X-\lambda_k)^{\dim(E_k)}$. On sait alors que ce polynôme divise le polynôme caractéristique de f ce qui montre que

$$\dim(E_k) \leq m_k.$$

Maintenant, si pour un entier $k \in [\![1,p]\!]$ on a $\dim(E_k) < m_k$, alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \dim(E_j) < \sum_{j=1}^{n} m_j = n$, ce qui contredit le fait que $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$. Finalement,

$$\boxed{\forall k \in [\![1,p]\!],\ \dim(E_k) = m_k.}$$

Montrons que $\varphi^{m_k-1} \neq 0$. Supposons par l'absurde que $\varphi^{m_k-1} = 0$ et considérons le polynôme

$$Q = (X-\lambda_k)^{m_k-1} \prod_{j\neq k} (X-\lambda_j)^{m_j} \text{ si } p \geq 2 \text{ ou } Q = (X-\lambda_k)^{m_k-1} = (X-\lambda_1)^{n-1} \text{ si } p = 1.$$

Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on a $Q(f_i) = 0$ (des polynômes en f commutent) et donc $Q(f) = 0$. Mais Q est un polynôme non nul de degré $(m_k - 1) + \displaystyle\sum_{j\neq k} m_j = \left(\sum_{j=1}^{p} m_j\right) - 1 = n-1$. L'égalité $Q(f) = 0$ fournit alors une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de la famille $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ ce qui contredit la liberté de cette famille. Donc

$$\boxed{\varphi^{m_k-1} \neq 0.}$$

c) φ_k est donc un endomorphisme nilpotent de E_k, d'indice $m_k = \dim E_k$. D'après la question 4), il existe une base $\mathscr{B}_k$ de E_k dans laquelle la matrice de φ_k est la matrice compagnon de format m_k

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ou encore dans laquelle la matrice de f_k est

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_k$. D'après la question 7)a), $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_p$ et donc $\mathscr{B}$ est une base de E et la matrice de f dans cette base a la forme désirée.

d) Il s'agit de vérifier que la matrice précédente est semblable à une matrice compagne qui ne peut être, d'après la question 2), que la matrice compagne de P_f.
Soit donc C la matrice compagne de P_f et g l'endomorphisme de matrice C dans une base donnée de E. Le polynôme caractéristique de g est celui de f à savoir $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{m_k}$ et d'autre part, g est cyclique d'après la question 1).
D'après la question 6), la famille $(\mathrm{Id}, g, \ldots, g^{n-1})$ est libre et d ?après la question 7), il existe une base de E dans laquelle la matrice de g est la matrice diagonale par blocs du 7). C est donc semblable à cette matrice ce qui montre que f est cyclique.

$$\boxed{\text{si } (\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n-1}) \text{ est une famille libre, } f \text{ est cyclique.}}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

III 8) a) $\det(Q_1 + \lambda Q_2)$ est un polynôme en λ, non nul car $\det(Q_1 + iQ_2) = \det Q \neq 0$ et admet donc un nombre fini de racines. $\mathbb{R}$ étant infini, il existe au moins un réel λ_0 tel que $\det(Q_1 + \lambda_0 Q_2) \neq 0$ ou encore tel que la matrice $P = Q_1 + \lambda_0 Q_2$ soit une matrice réelle inversible.

$$\boxed{\{\lambda \in \mathbb{R} / \ Q_1 + \lambda Q_2 \in \mathscr{G}\mathscr{L}_n(\mathbb{R})\} \neq \varnothing.}$$

Maintenant, en posant $P = Q_1 + \lambda_0 Q_2$,

$$\begin{aligned} A = QBQ^{-1} &\Rightarrow AQ = QB \Rightarrow AQ_1 + iAQ_2 = Q_1 B + iQ_2 B \\ &\Rightarrow AQ_1 = Q_1 B \text{ et } AQ_2 = Q_2 B \text{ (en identifiant les parties réelles et imaginaires puisque } A \text{ et } B \text{ sont réelles)} \\ &\Rightarrow A(Q_1 + \lambda_0 Q_2) = (Q_1 + \lambda_0 Q_2)B \\ &\Rightarrow AP = PB \Rightarrow A = PBP^{-1}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2, \ (A \text{ et } B \text{ semblables dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow A \text{ et } B \text{ semblables dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})).}$$

b) Soit A la matrice de f dans une base donnée de E. D'après la question 7), A est semblable dans $\mathbb{C}$ à une matrice compagne. Mais A est réelle, et donc cette matrice compagne est réelle. Ces deux matrices réelles sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et donc, d'après la question a), dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice compagne. D'après la question 1), f est cyclique.

$$\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \ f \text{ est cyclique si et seulement si la famille } (Id, f, ..., f^{n-1}) \text{ est libre.}}$$

QUATRIEME PARTIE : une autre caractérisation des endomorphismes cycliques

IV 9) a) Soit $g \in \mathscr{C}(f)$. Puisque la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de E, on peut poser

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0).$$

Posons encore $h = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$ de sorte que l'on a déjà $g(x_0) = h(x_0)$. Plus généralement, pour $j \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned} g(f^j(x_0)) &= f^j(g(x_0)) \text{ (puisque } g \text{ est dans } \mathscr{C}(f)) \\ &= f^j(h(x_0)) \\ &= h(f^j(x_0)) \text{ (puisque } h \text{ est un polynôme en } f \text{ et donc commute avec } f^j). \end{aligned}$$

Ainsi, les endomorphismes g et h coïncident sur une base de E et donc sont égaux. Par suite, $g \in \mathbb{K}[f]$. En résumé, $\mathscr{C}(f) \subset \mathbb{K}[f]$. Comme on a toujours $\mathbb{K}[f] \subset \mathscr{C}(f)$, on a montré que

$$\boxed{\text{si } f \text{ est cyclique, } \mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f].}$$

b) Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. S'il existe $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$ alors g est dans $\mathscr{C}(f)$.
Réciproquement, si g est dans $\mathscr{C}(f)$, d ?après la question a), il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $g = P(f)$. La division euclidienne de P par P_f fournit un polynôme Q et un polynôme R de degré au plus $n-1$ tels que $P = QP_f + R$. Par suite,

$$g = P(f) = Q(f) o P_f(f) + R(f) = R(f) \text{ d'après le théorème de } \textsc{Cayley-Hamilton}.$$

g est donc bien de la forme $R(f)$ où R est un polynôme de degré au plus $n-1$.

$$\boxed{\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}_{n-1}[f].}$$

IV 10) Supposons f non cyclique. D'après la question 7), la famille $(Id, f, ..., f^{n-1})$ est liée et, en écrivant une relation de dépendance, on voit qu'il existe un entier $p \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $f^p \in \text{Vect}(Id, f, ..., f^{p-1})$.

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

Mais alors, par récurrence, pour $k \geq p$, $f^k \in \text{Vect}(\text{Id}, f, ..., f^{p-1})$ (en effet, si pour $k \geq p$, $f^k \in \text{Vect}(\text{Id}, f, ..., f^{p-1})$ alors $f^{k+1} \in \text{Vect}(f, ..., f^p) \subset \text{Vect}(\text{Id}, f, ..., f^{p-1})$).
Par suite, $\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f] = \text{Vect}(f^k)_{k \in \mathbb{N}} = \text{Vect}(\text{Id}, f, ..., f^{p-1})$ et en particulier, $\dim(\mathbb{K}[f]) \leq p < n$. Ceci contredit le résultat admis dans le préambule de l'énoncé à savoir $\dim(\mathscr{C}(f)) \geq n$. On a montré que si $\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]$ alors f est cyclique.
Finalement

$$\boxed{f \text{ est cyclique si et seulement si } \mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f].}$$

CINQUIEME PARTIE : cycles

V 11) a) Pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, $f^p(f^k(x_0)) = f^k(f^p(x_0)) = f^k(x_0) = I(f^k(x_0))$. Par suite, les endomorphismes f^p et I coïncident sur une famille génératrice de E et donc $f^p = I$.

$$\boxed{\text{si } f \text{ est un } p\text{-cycle, } f^p = I.}$$

b) $\mathscr{E}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, non vide (car x_0 est nécessairement non nul de sorte que $k = 1$ est dans $\mathscr{E}$) et majoré par n (car le cardinal d'une famille libre de E est majoré par la dimension de E). $\mathscr{E}$ admet donc un plus grand élément que l'on note m.

c) Par définition de m, la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$ est libre et la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^m(x_0))$ est liée. Par suite, $f^m(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$. De plus, si pour $k \geq m$, $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$ alors

$$f^{k+1}(x_0) \in \text{Vect}(f(x_0), ..., f^m(x_0)) \subset \text{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0)).$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall k \geq m,\ f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0)).}$$

La famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$ est déjà libre dans E. Vérifions que cette famille est génératrice de E.
On a déjà $m \leq n \leq p$ (car la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$ est libre dans E et la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E). De plus, pour $k \geq m$, $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$. Donc, $E = \text{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0)) = \text{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$ et la famille $\text{Vect}(x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0))$ est une base de E. On en déduit que

$$\boxed{m = n \text{ et que } f \text{ est cyclique.}}$$

Le polynôme $X^p - 1$ est annulateur de f, non nul à racines simples dans $\mathbb{C}$ (car sans racine commune avec sa dérivée pX^{p-1}). Donc, f est diagonalisable. Par suite, l'ordre de multiplicité de chacune de ses valeurs propres est exactement la dimension du sous-espace propre associé. Mais, f étant cyclique, les sous-espaces propres de f sont d'après la question 3) de dimension 1. Finalement, f admet n valeurs propres simples ou encore n valeurs propres deux à deux distinctes. Notons que ces valeurs propres sont à choisir parmi les racines du polynôme $X^p - 1$ et sont donc des racines p-ièmes de l ?unité.

$$\boxed{f \text{ admet } n \text{ valeurs propres deux à deux distinctes.}}$$

V 12) Si $p = n$, la matrice de f dans la base $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une matrice compagne et donc la matrice compagne de f.

Soit alors $k \in [\![1, n]\!]$.

$$CU_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^{nk} \\ \overline{\omega}^{k} \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \frac{1}{\overline{\omega}^k} \begin{pmatrix} \overline{\omega}^{k} \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \overline{\omega}^{3k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{nk} \end{pmatrix} = \omega^k U_k.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.

V 13) Le coefficient ligne k, colonne l de la matrice $M\overline{M}$ vaut

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{\omega}^{kj}\omega^{jl} = \sum_{j=1}^{n} \omega^{-kj}\omega^{jl} = \sum_{j=1}^{n} (\omega^{(l-k)})^{j}.$$

Maintenant, $\omega^{l-k} = 1 \Leftrightarrow l-k \in n\mathbb{Z}$. Mais, puisque $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq l \leq n$, on a $-(n-1) \leq l-k \leq n-1$. Mais alors, le seul multiple de n compris entre $-(n-1)$ et $n-1$ étant 0, $\omega^{l-k} = 1 \Leftrightarrow k = l$. On a donc deux cas :

1er cas. Si $k = l$,

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{\omega}^{kj}\omega^{jl} = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$

2ème cas. Si $k \neq l$,

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{\omega}^{kj}\omega^{jl} = \omega^{l-k}\frac{1-(\omega^{l-k})^{n}}{1-\omega^{l-k}} = \omega^{l-k}\frac{1-1}{1-\omega^{l-k}} = 0.$$

Ainsi, le coefficient ligne k, colonne l de la matrice $M\overline{M}$ vaut $n\delta_{k,l}$. On en déduit que $M\overline{M} = nI_n$ ou encore que $M\left(\frac{1}{n}\overline{M}\right) = \left(\frac{1}{n}\overline{M}\right)M = I_n$. Ainsi

$$\boxed{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ et } M^{-1} = \frac{1}{n}\overline{M}.}$$

V 14)) On note que $A = a_0 I_n + a_1 C + a_2 C^2 + ... + a_{n-1}C^{n-1} = Q(C)$ où $Q = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1}X^{n-1}$. D'après les questions 11)c) et 12), f (ou C) a n valeurs propres deux à deux distinctes à savoir les ω_k, $1 \leq k \leq n$, une base de vecteurs propres associée étant $(U_1, ..., U_n)$ et est donc diagonalisable. La matrice dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de la famille $(U_1, ..., U_n)$ étant M, on a plus précisément

$$C = MDM^{-1} \text{ où } D = \mathrm{diag}(\omega, \omega^2, ..., \omega^n).$$

Mais alors,

$$A = Q(C) = MQ(D)M^{-1} = M\mathrm{diag}(Q(\omega), Q(\omega^2), ..., Q(\omega^n))M^{-1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{c}A \text{ est diagonalisable, } \mathrm{Sp}(A) = (Q(\omega), Q(\omega^2), ..., Q(\omega^n)) \text{ où } Q = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1}X^{n-1} \\ \text{et une base de vecteurs propres de } A \text{ est } (U_1, ..., U_n).\end{array}}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.